2004年　東大数学　文系第2問 ①

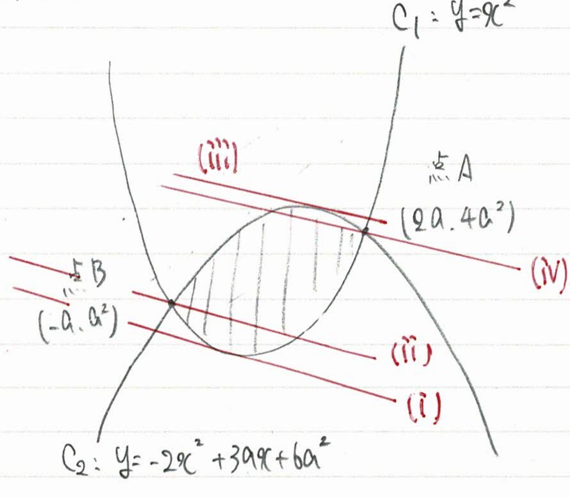
$y=x^2$ と $y=-2x^2+3ax+6a^2$ が
共有点を持つ条件は
$x^2=-2x^2+3ax+6a^2$
⇔ $3x^2-3ax-6a^2=0$
⇔ $x^2-ax-2a^2=0$
が解を持つ。すなわち、(判別式) $\geqq 0$ である。
(判別式) $=(-a)^2-4\times1\times(-2a^2)$
$=9a^2>0$
よって、$a>0$ において、必ず2交点を持つ。

まず、領域Dが存在する条件。

また、その交点を求めると
$x^2=-2x^2+3ax+6a^2$
⇔ $x^2-ax-2a^2=0$
⇔ $(x+a)(x-2a)=0$ より
$x=-a$ または $x=2a$
よって $(-a,\ a^2)$ と $(2a,\ 4a^2)$ である。

領域Dの端点を調べる

よって、領域Dを図示すると、



上のように、点A、点B、放物線 C_1、放物線 C_2
を定義すると、

(i) $x+y=k$ と C_1 が接するとき
(ii) $x+y=k$ が点Bを通るとき
(iii) $x+y=k$ と C_2 が接するとき
(iv) $x+y=k$ が点Aを通るとき
とすると
$x+y$ の最小値は、(i)か(ii)の場合
$x+y$ の最大値は (iii)か(iv)の場合 である。

$\boxed{\text{解法1：通る点で場合分けする}}$

最小について、$x+y=k$ と C_1 が接するとき、連立して、

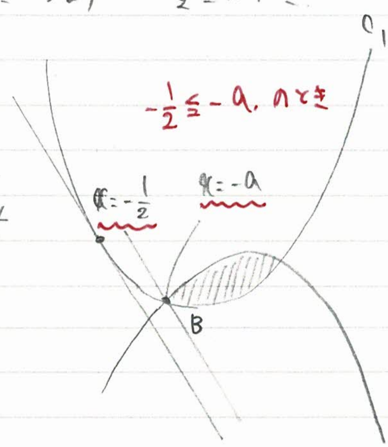
$$\begin{cases} x+y=k \\ y=x^2 \end{cases} \quad \therefore\ x^2+x-k=0 \qquad D=0 \Leftrightarrow k=-\frac{1}{4}$$

このとき、接点は、$x^2+x+\frac{1}{4}=0$ ⇔ $(x+\frac{1}{2})^2=0$
⇔ $x=-\frac{1}{2}$ より $(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{4})$ である。

接点のx座標。
これと、$x=-a$ の大小を比較す

(ii) $-\frac{1}{2}\leqq -a$ のとき　つまり　$\frac{1}{2}\geqq a$ のとき

最小値は、$x=-a$
のとき $(y=a^2)$
よって $x+y=-a+a^2$ //

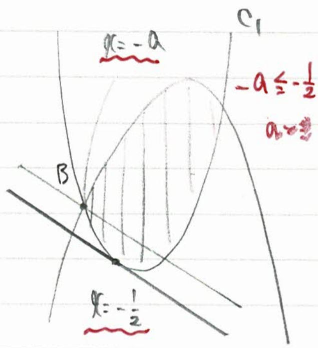


2004年　東大数学　文系 第2問 ②

(i) $-\frac{1}{2} \geqq -a$ つまり $\frac{1}{2} \leqq a$ のとき

最小値は $x=-\frac{1}{2}$ のとき。
$(y=\frac{1}{4})$

よって
$x+y=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$ //



最大 について、$x+y=k$ と C_2 が接するとき、

連立して $\begin{cases} x+y=k \\ y=-2x^2+3ax+6a^2 \end{cases}$

$\therefore\ -x+k=-2x^2+3ax+6a^2$.

$\Leftrightarrow 2x^2-(3a+1)x-6a^2+k=0$

$D=0 \Leftrightarrow (3a+1)^2-4\times2\times(6a^2-k)=0$

$\therefore\ k=\frac{1}{8}(57a^2+6a+1)$

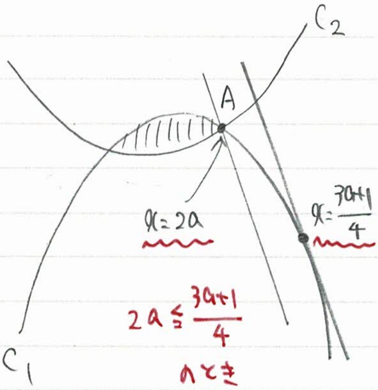
このとき、接点は

$2x^2-(3a+1)x-6a^2+k=0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{(3a+1)\pm\sqrt{0}}{2\times2}=\dfrac{3a+1}{4}$

(iv) $2a \leqq \frac{3a+1}{4}$ のとき つまり $a \leqq \frac{1}{5}$ のとき

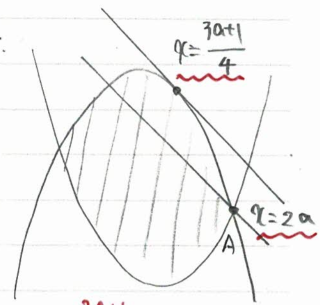
最大値は $x=2a$ のとき
よって
$x+y=2a+4a^2$ //



(iii) $2a \geqq \frac{3a+1}{4}$ つまり $\frac{1}{5} \leqq a$ のとき

最大値は $x=\frac{3a+1}{4}$ のときで、

$\frac{1}{8}(57a^2+6a+1)$ //



$\frac{3a+1}{4} \leqq 2a$ のとき

よって 以上より

最小値は $0<a\leqq\frac{1}{2}$ のとき $-a+a^2$
　　　　$\frac{1}{2}\leqq a$ のとき $-\frac{1}{4}$
最大値は $0<a\leqq\frac{1}{5}$ のとき $2a+4a^2$
　　　　$\frac{1}{5}\leqq a$ のとき $\frac{1}{8}(57a^2+6a+1)$ //

解法2：Max や Min の値で場合わけする

最小値の候補は (i) と (ii)
最大値の候補は (iii) と (iv) である。

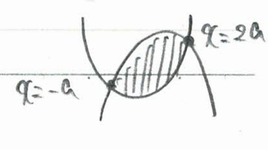
$\begin{cases} \text{(i)のとき、解法1と同様に、} k=-\frac{1}{4} \quad (x=-\frac{1}{2}) \\ \text{(ii)のとき} \quad k=-a+a^2 \quad (x=-a) \end{cases}$ なので

$-a+a^2 \geqq -\frac{1}{4} \Leftrightarrow a^2-a+\frac{1}{4}\geqq0 \Leftrightarrow (a-\frac{1}{2})^2\geqq0$

$\therefore$ aはすべての実数

解法1と違う結論。
$\frac{1}{2}\leqq a$ となるはず。

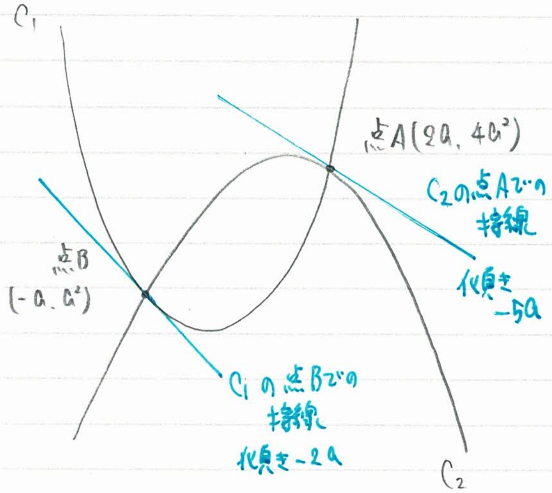
例) $a=\frac{1}{4}$ のとき 確かに $-a+a^2>-\frac{1}{4}$ となるが、
(i)の接点の $(-\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ と (ii)の接点 $(-a,a^2)=(-\frac{1}{4},\frac{1}{16})$ を比較すると、(i)の接点が $-a\leqq x\leqq 2a$ にないので、不適。



このように、他の場合も確かめながら答える。

2004 東大数学 文系第2問 ③

解法3：点Aと点Bでの接線の傾きで場合分け



C_1について、

$y=x^2$ より $y'=2x$ に $x=-a$ を代入し、$y'=-2a$

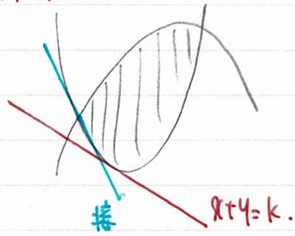
よって、$-2a$ と -1 の大小比較をする。
$x+y=k$の傾き

① $-2a \leqq -1$ のとき、$a \geqq \frac{1}{2}$

右図のようになるので、

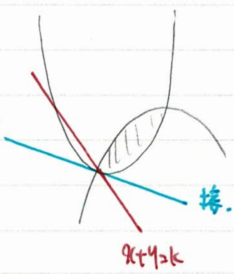
kの最小は、

$x+y=k$ と C_1 が接するとき



② $-2a \geqq -1$ のとき $a \leqq \frac{1}{2}$

kの最小値は、$(-a, a^2)$ を通るとき



C_2について、

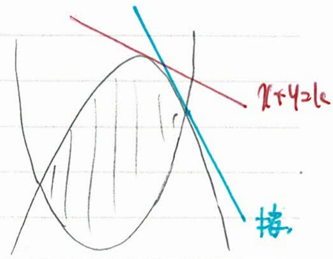
$y=-2x^2+3ax+6a^2$ より $y'=-4x+3a$ なので、

$x=2a$ を代入すると $y'=-5a$

よって $-5a$ と -1 の大小比較をする。

③ $-5a \leqq -1 \iff a \geqq \frac{1}{5}$ のとき

kの最大は、C_2 と $x+y=k$ が接するとき



④ $-5a \geqq -1 \iff a \leqq \frac{1}{5}$ のとき

kの最大は

点A$(2a, 4a^2)$ を通るとき。